Suites de Fonctions

Dans ce chapitre les fonctions sont définies sur un intervalle I et à valeurs dans K = R ou C.

I – Convergence Simple et Convergence Uniforme :

Définition :
On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in N}$ de I dans K converge simplement vers une fonction f de I dans K si et seulement si : pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers f (x).
Soit encore si et seulement si : $\forall x \in I, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
Soit encore si et seulement si : $\forall x\in I, \exists \varepsilon > 0, \exists n_0\in N, \forall n \geq n_0, | f_n(x) - f(x) | \leq \varepsilon$.
(n_0 dépend de x.)

Remarque :
On parle parfois de "convergence" pour "convergence simple".

Rappel :
On note B(I) ou B(I,K) l'ensemble des fonctions bornées de I dans K. On sait que B(I) muni de la norme uniforme $\| f \|_\infty = \sup_{x\in I} | f(x) |$ est un espace vectoriel normé.

Définition :
On dit qu'une suite de fonctions (f_n) de I dans K converge uniformément vers une fonction f si et seulement si la suite (f_n) converge vers f dans B(I) muni de la norme uniforme.
Soit encore si et seulement si : $\| f_n - f_\infty \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
Soit encore si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0\in N, \forall n \geq n_0, \sup_{x\in I} | f_n(x) - f(x) | \leq \varepsilon$
Soit encore si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0\in N, \forall n \geq n_0, \forall x \in I, | f_n(x) - f(x) | \leq \varepsilon$
Ici n_0 ne dépend pas de x, n_0 est uniformément le même sur tout l'intervalle.

Corollaires :
1°) Si (f_n) n'est pas simplement convergente, alors (f_n) n'est pas uniformément convergente.
2°) Si (f_n) converge simplement vers f, alors (f_n) ne peut converger uniformément que vers f.

Définition :
On dit qu'une suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment vers une fonction f si et seulement si pour tout segment [a,b] inclus dans I, la suite $(f_{n|[a,b]})$ converge uniformément vers $f_{|[a,b]}$.
Soit encore si et seulement si : pour tout segment [a,b] inclus dans I, $\sup_{x\in I} | f_n(x) - f(x) | \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Propriété :
1°) Si (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers f.
2°) Si (f_n) converge uniformément vers tout segment de I vers f, alors (f_n) converge simplement vers f.

II – Continuité :

Propriété :
Si (f_n) converge uniformément vers f et si $\forall$ n f_n est continue en $x_0 \in$ I, alors f est continue en x_0.

Propriété :
Si la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f et si $\forall$ n f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.

Propriété :
Si la suite (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers f et si $\forall$ n f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.

Conséquence :
Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant simplement vers f sur I. Si $\forall$ n f_n est continue sur I et si f n'est pas continue sur I, alors la convergence n'est pas uniforme, ni même uniforme sur tout segment (par l'absurde).

III – Théorème de Weierstrass :

Propriété : (Théorème d'approximation de Weierstrass)
Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Propriété : (Théorème de Weierstrass trigonométrique)
Toute fonction continue et 2-π périodique est limite uniforme sur R d'une fonction de polynômes trigonométriques complexes : $\sum_{k=-n}^{n} C_k . e^{i.k.x}$

IV – Intégration et Dérivation :

Propriété : (Intégration des suites de fonctions)
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur [a,b] à valeurs dans K. Si la suite (f_n) converge uniformément sur [a,b], alors :
1°) f est continue sur [a,b]
2°) la suite (f_n) converge en moyenne vers f
3°) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t).dt = \int_a^b f(t).dt$ c'est-à-dire : $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t).dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t).dt$
(+ 2 théorèmes d'intégration sur un intervalle quelconque cf intégration des suites de fonctions)

Propriété : (Dérivation des suites de fonctions)
Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 de I dans K. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f et si (f_n') converge uniformément vers une fonction g, alors f est de classe C^1 et f ' = g.
(Le résultat se généralise si on suppose seulement que la suite (fn') converge uniformément sur tout segment de I vers g)

© Archi 2001
http://www.prepasciences.com